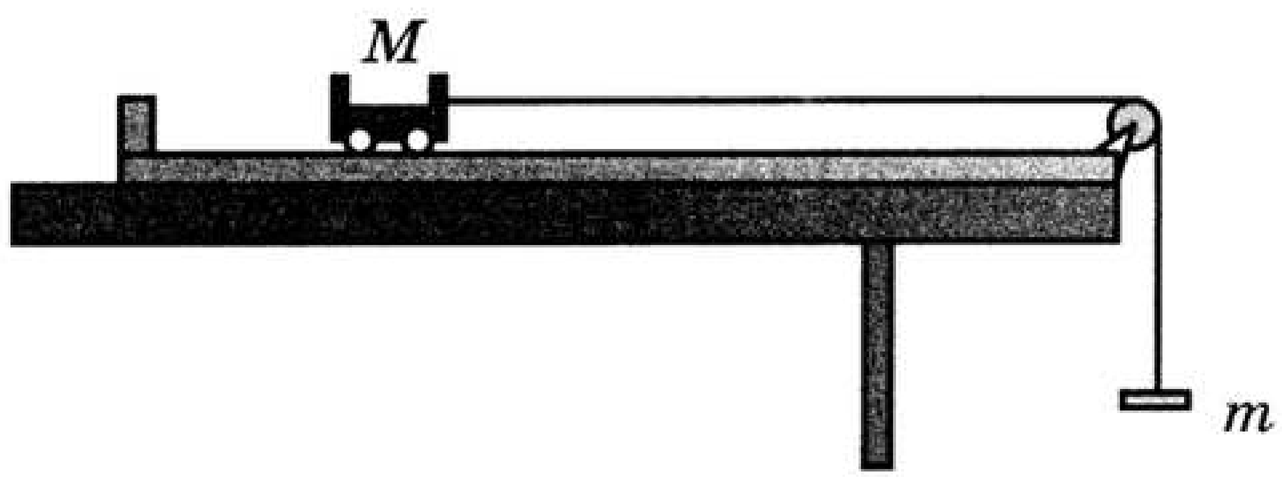
26

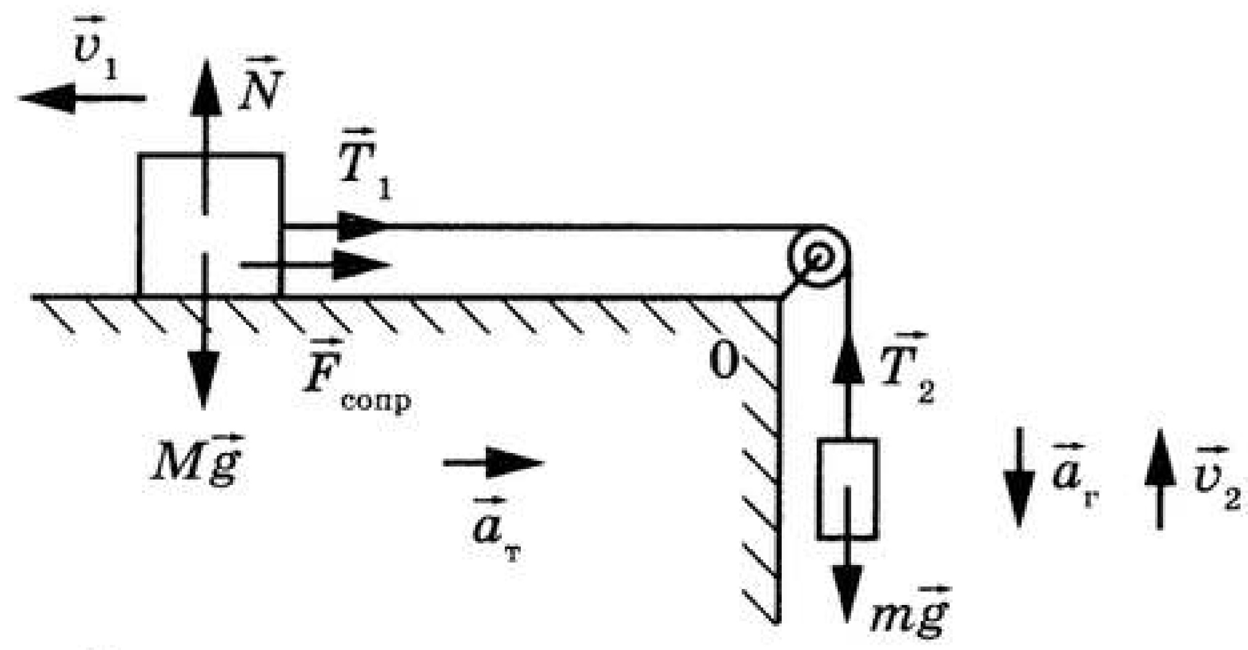
v 1

Если в установке, изображённой на рисунке, первоначально покоящуюся тележку толкнуть влево, то она движется с ускорением 3 м/с^2. Если же тележку толкнуть вправо, то она движется равномерно. Найдите массу M тележки, если масса грузика на нити $m = 150$ г. Массами блока и нити пренебречь. Нить нерастяжима. Модуль силы сопротивления движению тележки считать постоянным и одинаковым в обоих случаях, трением в оси блока пренебречь. Сделайте рисунки с указанием сил, действующих на тележку и грузик в обоих случаях.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

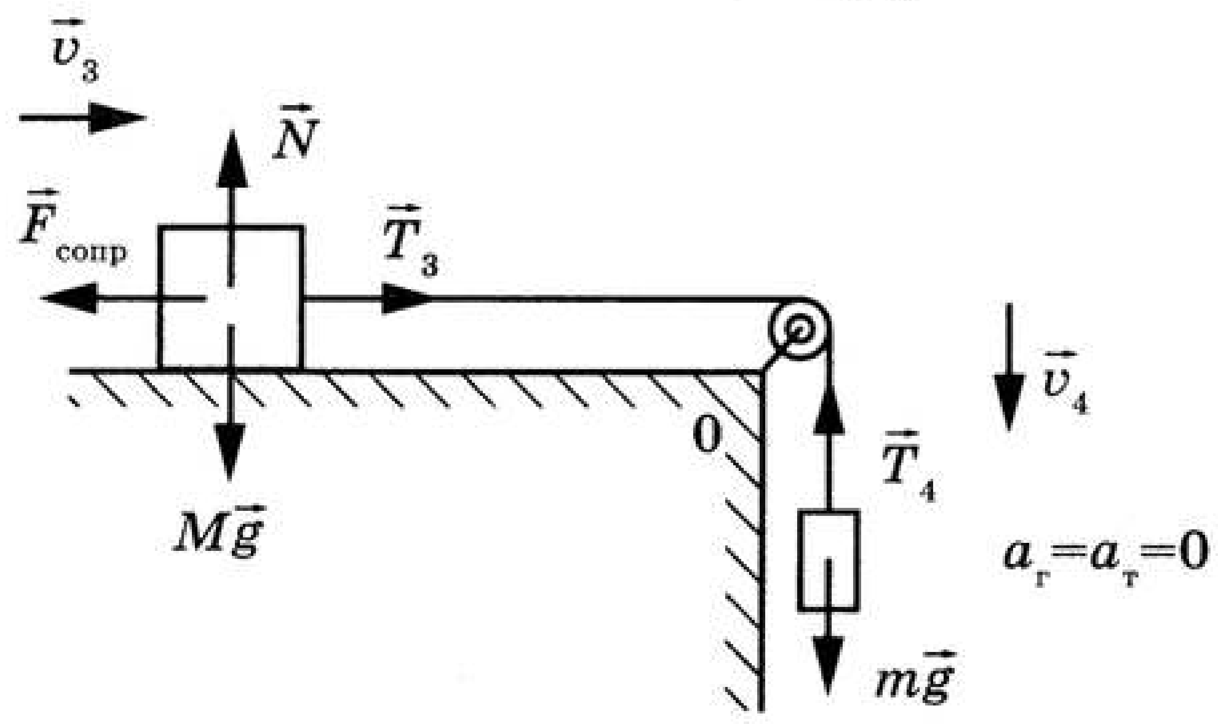


1. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй.

2. Тела будем считать материальными точками, так как они движутся поступательно. Поэтому к описанию движения тел применим второй закон Ньютона.

3. Поскольку нить нерастяжима, то модули ускорений тележки и грузика равны: $|\vec{a}_г| = |\vec{a}_т| = a$.

4. Так как блок и нить невесомы и трение в оси блока отсутствует, то силы натяжения нити, действующие на тележку и грузик, одинаковы по модулю: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_4|$.



Решение

1. Запишем второй закон Ньютона для тележки в проекциях на горизонтальное направление, а для грузика — в проекциях на вертикальное направление в случае движения после толчка влево:

$$T + F_{сопр} = Ma,$$

$$mg - T = ma.$$

Отсюда

$$a = \frac{T + F_{сопр}}{M} = \frac{mg - T}{m}.$$

2. Из последнего равенства находим выражение для модуля силы натяжения нити T:

$$T = \frac{mMg - mF_{сопр}}{m + M}.$$

3. При равномерном движении тележки после толчка вправо $mg - T_4 = 0$, $T_3 = F_{сопр}$, откуда с учётом $T_3 = T_4$ получаем: $F_{сопр} = mg$. Подставляя найденные выражения для T и $F_{сопр}$ в формулу

$$a = \frac{mg - T}{m},$$

получаем:

$$a = g - \frac{T}{m} = g - \frac{Mg - mg}{M + m} = g \cdot \frac{2m}{M + m},$$

откуда

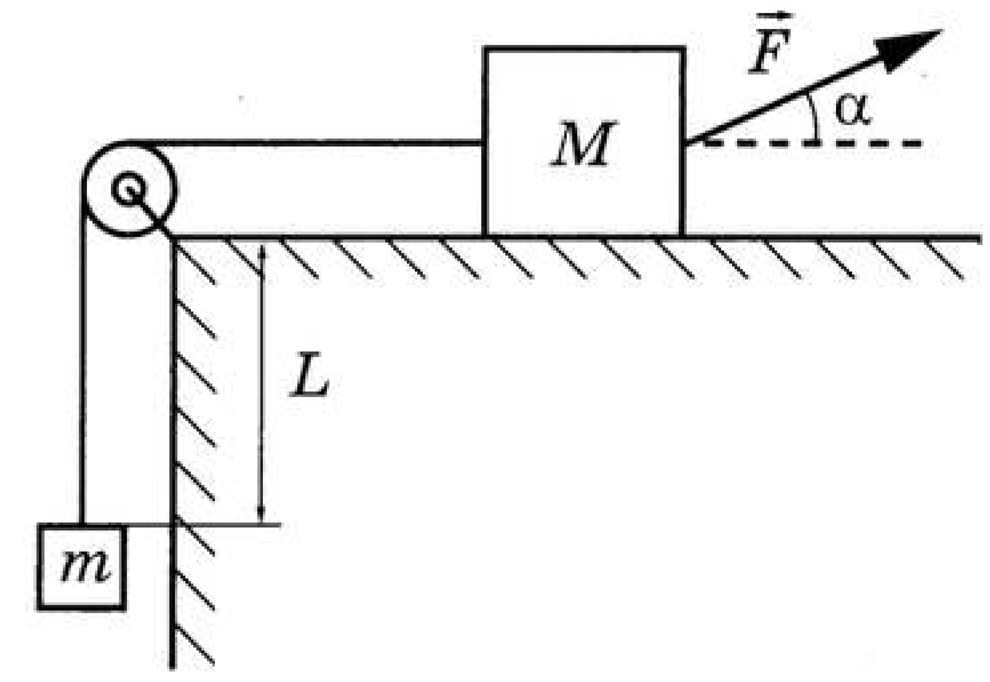
$$M = \frac{m(2g - a)}{a} = \frac{0{,}15 \cdot (2 \cdot 10 - 3)}{3} = 0{,}85 \text{ кг}.$$

Ответ: $M = 0{,}85$ кг.

26

v 3

На горизонтальном столе находится брусок массой $M = 1$ кг, соединённый невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок, с грузом массой $m = 500$ г. На брусок действует сила величиной $F = 9$ Н, направленная под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (см. рисунок). В момент начала движения груз находится на расстоянии $L = 40$ см от края стола. За какое время t груз поднимется до края стола, если коэффициент трения между бруском и столом $\mu = 0{,}3$? Сделайте схематичный рисунок с указанием сил, действующих на брусок и груз. Трением в оси блока и трением о воздух пренебречь.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

1. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом. Будем применять для груза и бруска второй закон Ньютона, справедливый для материальных точек, поскольку тела движутся поступательно.

2. На рисунке показаны силы, действующие на брусок и груз. Так как нить нерастяжима, ускорения бруска и груза равны по модулю:

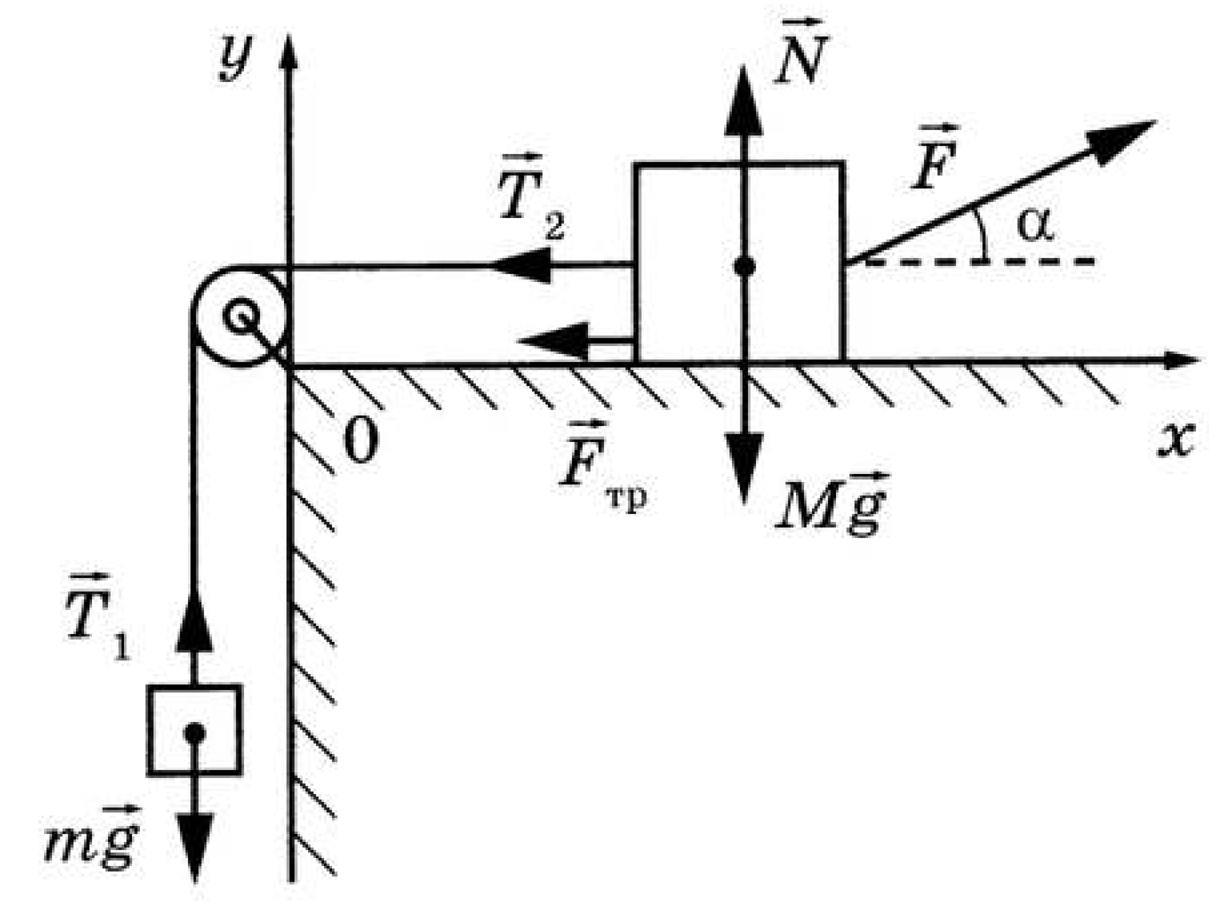
$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a. \qquad (1)$$

3. Так как блок и нить невесомы и трение в оси блока, а также трение о воздух отсутствует, то силы натяжения нити, действующие на груз и брусок, одинаковы по модулю:

$$T_1 = T_2 = T. \qquad (2)$$

Решение

1. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy выбранной системы координат для каждого тела. С учётом (1) и (2) получим



для бруска:

$Ox: F\cos\alpha - T - F_{тр} = Ma,$

$Oy: N + F\sin\alpha = Mg;$

для груза:

$Oy: T - mg = ma.$

При этом модуль силы трения, действующей на брусок, $F_{тр} = \mu N$.

Решив полученную систему уравнений, найдём модуль ускорения тел:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - mg - \mu Mg}{M + m}.$$

2. Так как начальная скорость груза была равна нулю, $L = \dfrac{at^2}{2}$.

3. Окончательно получим:

$$\mu = \frac{F\cos\alpha - mg - \dfrac{2L(M+m)}{t^2}}{Mg - F\sin\alpha} = \frac{8 \cdot 0{,}866 - 0{,}5 \cdot 10 - \dfrac{2 \cdot 1 \cdot (1 + 0{,}5)}{2^2}}{1 \cdot 10 - 8 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}2.$$

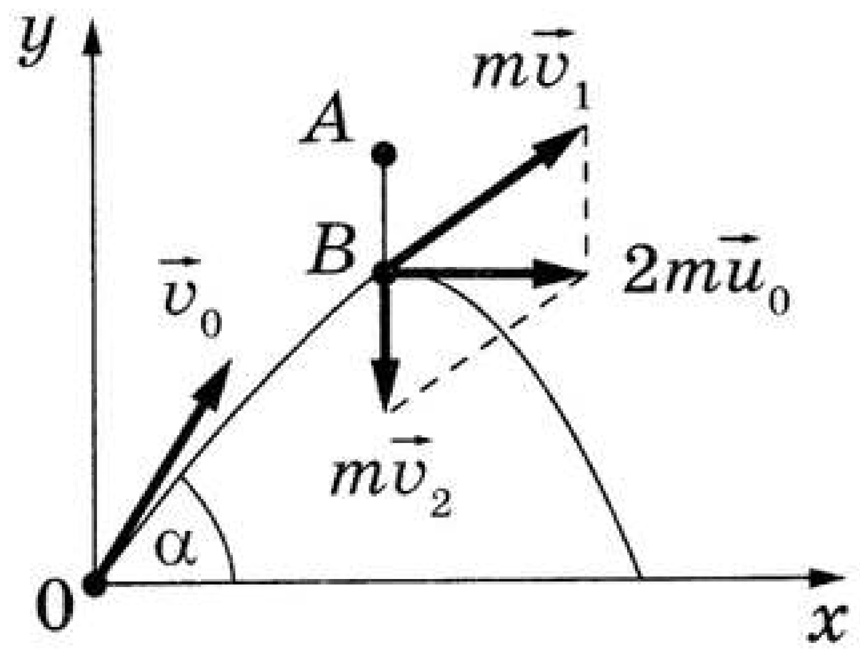
Ответ: $\mu \approx 0{,}2$.

26 v 5

Пластилиновый шарик в момент $t = 0$ бросают с горизонтальной поверхности Земли с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Одновременно с некоторой высоты над поверхностью Земли начинает падать из состояния покоя другой такой же шарик. Шарики абсолютно неупруго сталкиваются в воздухе. Сразу после столкновения скорость шариков направлена горизонтально. Через какое время после столкновения шариков они упадут на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование



1. Выберем инерциальную систему отсчёта, связанную с Землёй. За начало отсчёта координат примем первоначальное положение первого шарика.

2. Шарики будем считать материальными точками.

3. Так как сопротивлением воздуха можно пренебречь, то движение шариков можно считать свободным падением.

4. Считаем время взаимодействия шариков при неупругом столкновении малым. Следовательно, импульсом внешней силы (силы тяжести) за это время можно пренебречь. Значит, импульс системы двух шариков при столкновении сохраняется.

Решение

1. Первый шарик начинает движение из начала координат, а второй — из точки A. До и после столкновения (происходящего в точке B) шарики свободно падают. Поэтому до столкновения для первого шарика

$$y_1(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_{1y}(t) = v_0 \sin\alpha - gt,$$

а для второго шарика

$$v_{2y}(t) = -gt.$$

2. Шарики сталкиваются в момент t_1, при этом импульс системы двух шариков сохраняется: $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{u}_0$, а скорость $\vec{u}_0$ шариков после удара согласно условию горизонтальна. Поэтому $v_{1y}(t_1) + v_{2y}(t_1) = 0$, или $(v_0 \sin\alpha - gt_1) + (-gt_1) = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{2g}$.

3. Столкновение шариков происходит на высоте

$$h = y_1(t_1) = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{8g} = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}.$$

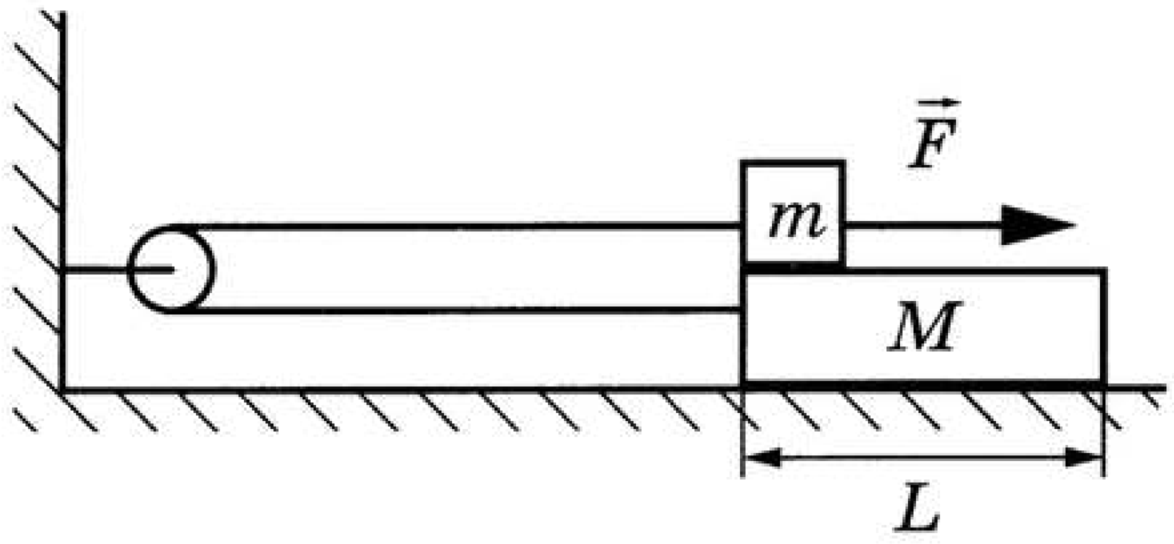
4. Поскольку скорость $\vec{u}_0$ шариков после удара горизонтальна, интервал времени τ от столкновения шариков до их падения на Землю находится из условия $h = \dfrac{g\tau^2}{2}$, откуда

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{3} \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{2g} = \frac{\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 10 \cdot 2} = 0{,}9 \text{ с}.$$

Ответ: $\tau = 0{,}9$ с.

26 v 7

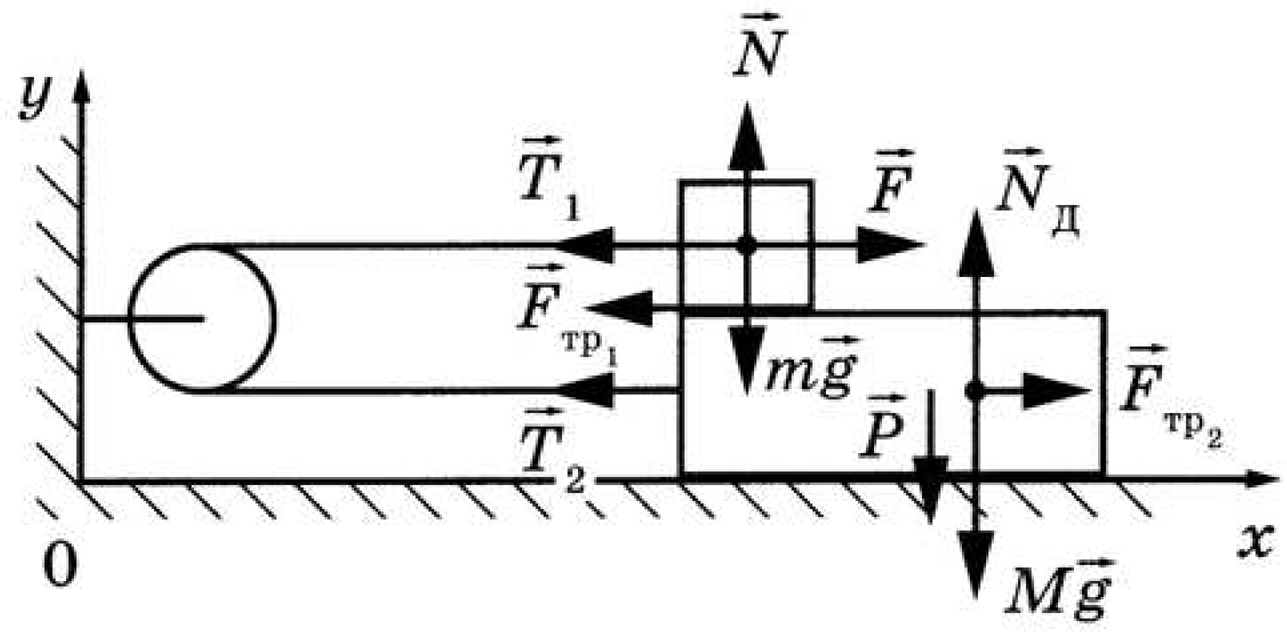
На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 1$ кг и длиной $L = 50$ см. На левом краю доски находится маленький брусок массой $m = 200$ г. Брусок и доска связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый гладкий блок, закреплённый на стене (отрезки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны и параллельны). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}3$. Брусок начинают тянуть вправо постоянной силой $\vec{F}$, параллельной горизонтальным отрезкам нити. Через время $t = 2$ с после начала движения брусок соскальзывает с доски. Определите модуль силы $\vec{F}$. Размерами бруска пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на доску и брусок.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

1. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчёта, связанной с поверхностью стола.



2. Будем использовать второй закон Ньютона для материальных точек, так как брусок и доска движутся поступательно. Трением о воздух пренебрежём. Силы, действующие на тела, постоянны, движение бруска и доски равноускоренное.

3. Так как нить нерастяжима, ускорения бруска и доски направлены горизонтально, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a,\ \vec{a}_1 = -\vec{a}_2. \qquad (1)$$

4. Так как блок и нити невесомы, трения в блоке нет, то силы натяжения нити, действующие на доску и брусок, одинаковы:

$$\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}. \qquad (2)$$

5. Силы трения, действующие на брусок и доску, равны друг другу по модулю и противоположны по направлению согласно третьему закону Ньютона:

$$F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр},\ \vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}. \qquad (3)$$

Решение

1. На рисунке показаны силы, действующие на брусок, и силы, действующие на доску.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy выбранной системы координат. С учётом (1)–(3) получим:

$$ma = F - F_{тр} - T,$$
$$-Ma = F_{тр} - T,$$
$$N = mg.$$

Вычтя второе уравнение из первого, найдём модуль ускорения каждого тела:

$$a = \frac{F - 2F_{тр}}{M + m}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, получим: $a = \dfrac{F - 2\mu mg}{M + m}$.

2. Брусок соскользнёт с доски, когда доедет до её правого края, то есть когда сумма расстояний, пройденных доской и бруском относительно стола, будет равна L:

$$\frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{2} = L.$$

3. Окончательно получим:

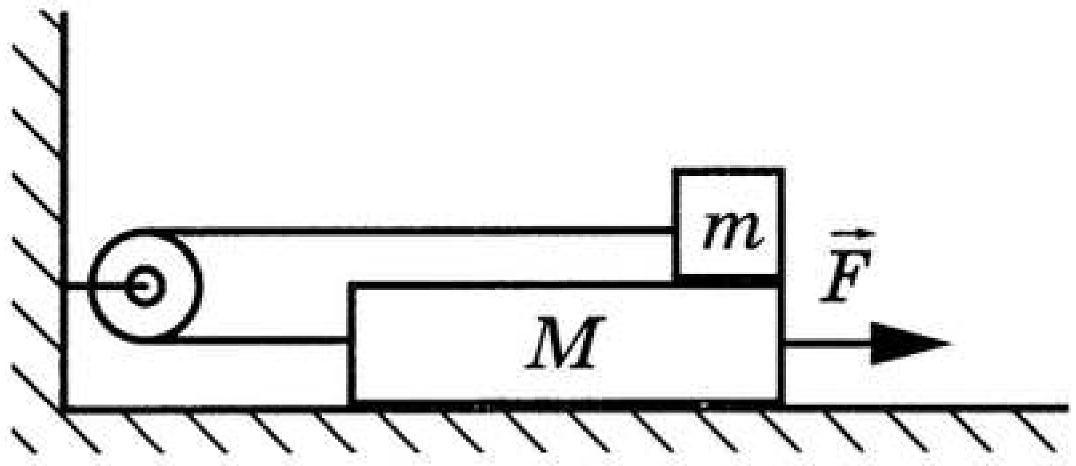
$$F = \frac{L(M + m)}{t^2} + 2\mu mg = \frac{0{,}5 \cdot (1 + 0{,}2)}{2^2} + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 10 = 1{,}35\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 1{,}35$ Н.

26

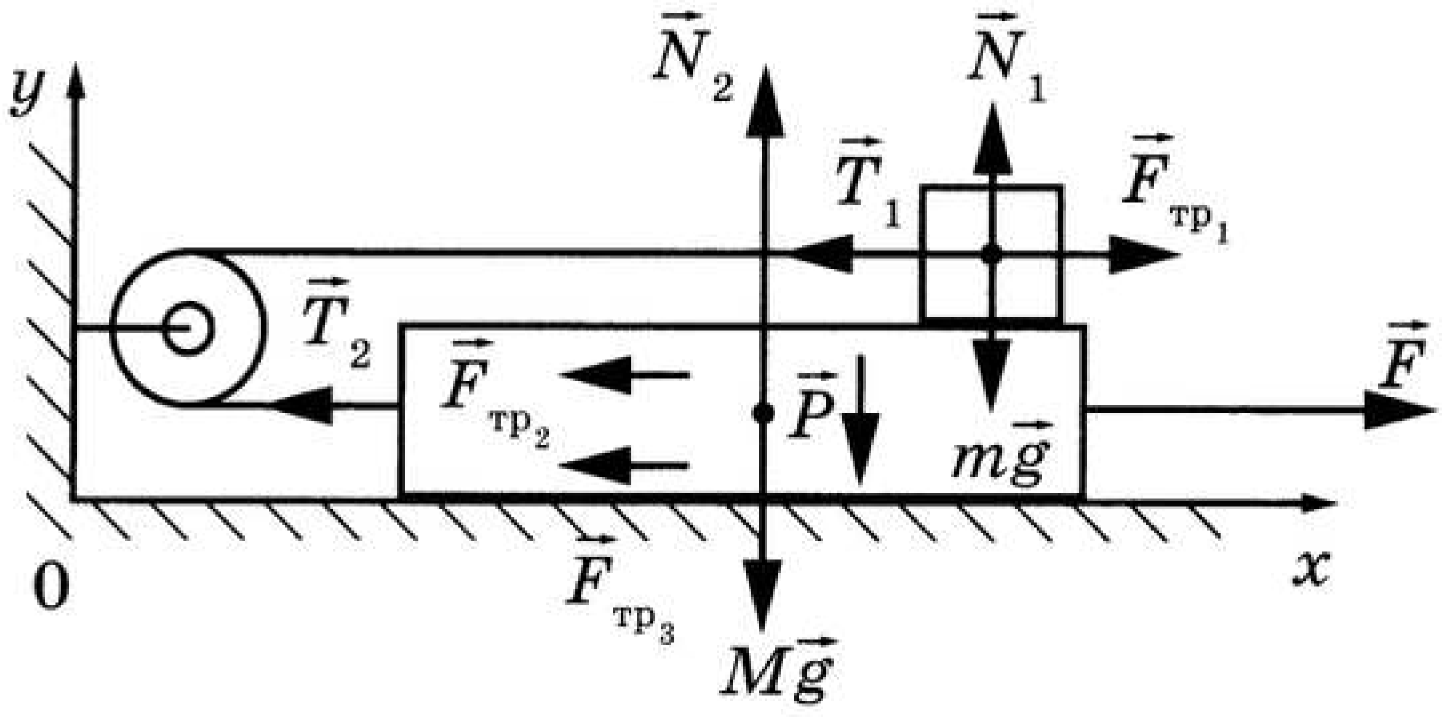
v9

На горизонтальном неподвижном столе лежит доска, на которой находится маленький брусок массой $m = 400$ г. Брусок и доска связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, закреплённый на стене (отрезки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны и параллельны). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}5$, между столом и доской $\mu_2 = 0{,}3$. Доску тянут вправо постоянной горизонтальной силой $\vec{F}$, параллельной горизонтальным отрезкам нити, $F = 12$ Н. Чему равна масса доски M, если модуль ускорения бруска относительно стола $a = 2$ м/с^2? Трением в оси блока пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на доску и брусок.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование



1. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчёта, связанной с поверхностью стола.

2. Тела движутся поступательно, поэтому их можно описывать моделью материальной точки. Следовательно, можно использовать второй закон Ньютона, сформулированный для материальных точек. Силы, действующие на тела, постоянны, движение бруска и доски равноускоренно.

3. Так как нить нерастяжима, ускорения бруска и доски относительно стола равны по модулю и противоположны по направлению:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a,\ \vec{a}_1 = -\vec{a}_2. \qquad (1)$$

4. Так как блок и нити невесомы и трением в оси блока можно пренебречь, то силы натяжения нити, действующие на доску и брусок, одинаковы:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T. \qquad (2)$$

5. Силы трения, действующие на брусок и доску, равны друг другу и противоположны по направлению по третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}. \qquad (3)$$

6. Модули сил нормальной реакции доски $\vec{N}_1$ и давления бруска на доску $\vec{P}$ также равны друг другу по третьему закону Ньютона:

$$N_1 = P.$$

Решение

1. На рисунке показаны силы, действующие на брусок и на доску. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy выбранной системы координат. С учётом (1)–(2) получим:

$$Ma = F - F_{тр2} - F_{тр3} - T,$$
$$-ma = F_{тр1} - T,$$
$$N_1 = mg,$$
$$N_2 = Mg + P.$$

2. Выполнив преобразования и учитывая (3), найдём силу, действующую на доску:

$$F = (M + m)a + 2F_{тр1} + F_{тр3}.$$

3. $F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$. Учитывая (4), получим $F_{тр3} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (M + m)g$.

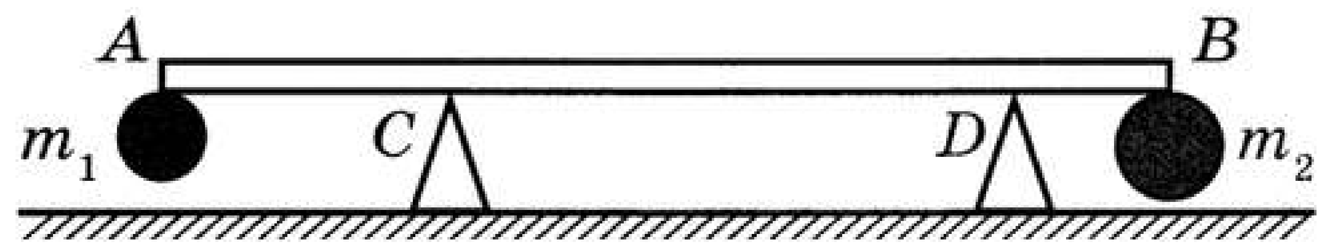
В итоге:

$$M = \frac{F - 2\mu_1 mg}{a + \mu_2 g} - m = \frac{12 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 10}{2 + 0{,}3 \cdot 10} - 0{,}4 = 1{,}2 \text{ кг}.$$

Ответ: $M = 1{,}2$ кг.

26 v11 Два небольших массивных шара массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг закреплены на концах невесомого стержня AB, лежащего горизонтально на опорах C и D. Длина стержня AB $L = 1$ м, а расстояние AC равно 0,2 м. Сила давления стержня на опору D в 2 раза больше, чем на опору C. Каково расстояние между опорами CD? Сделайте рисунок с указанием внешних сил, действующих на систему тел «стержень и шары».

Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.



Обоснование

1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

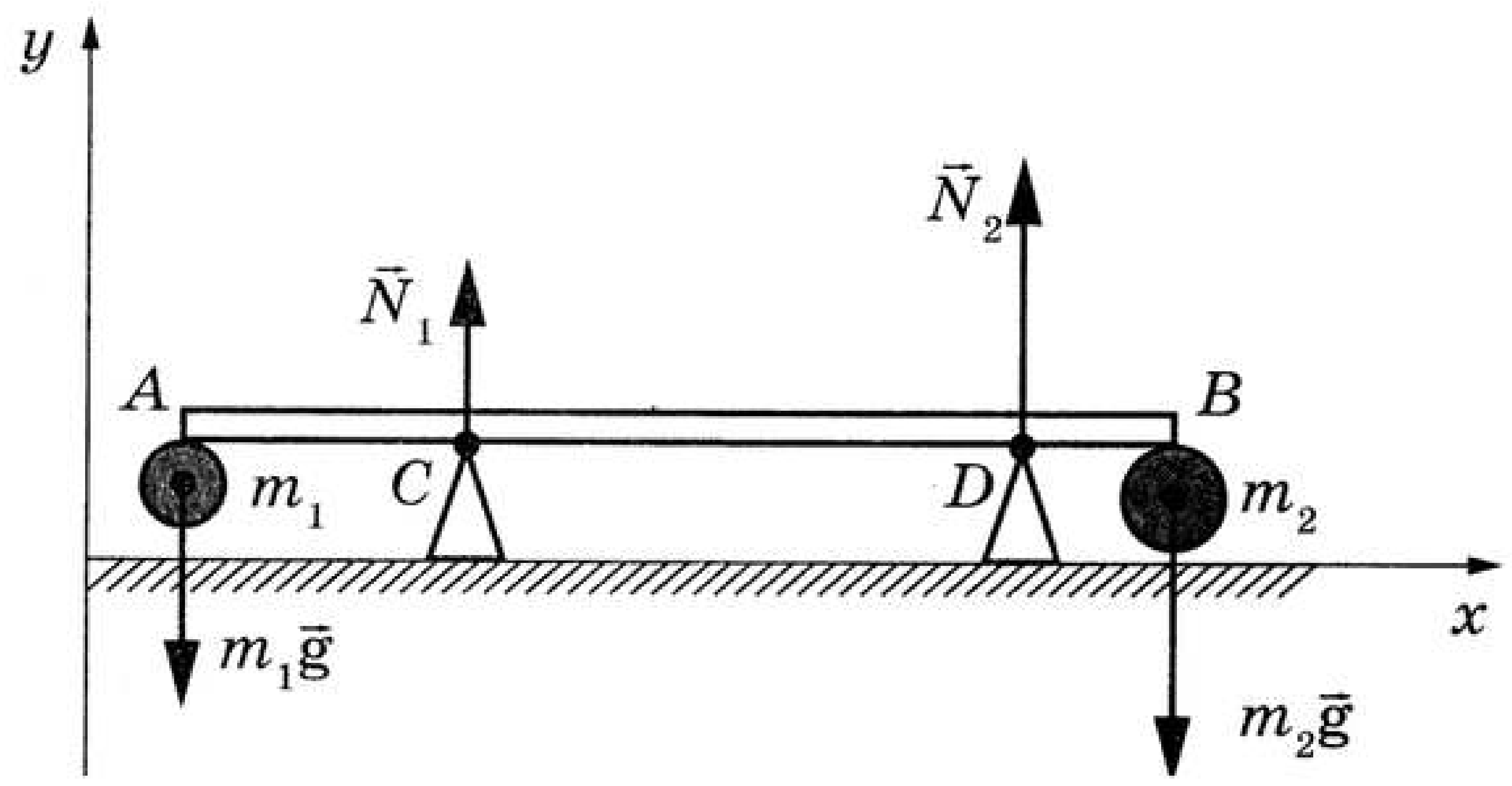
2. Описываем стержень с шарами моделью твёрдого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

3. Стержень с шарами не движется поступательно, поэтому сумма внешних сил, действующих на него, равна нулю.

4. Стержень с шарами не вращается, поэтому сумма моментов внешних сил относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка, равна нулю.

Решение

1. На твёрдое тело, образованное стержнем и двумя шарами, действуют следующие внешние силы: силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ приложенные к центрам шаров, и силы реакции опор $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. По третьему закону Ньютона модули сил реакции равны соответствующим модулям сил давления стержня на опоры, поэтому $N_2 = 2N_1$ (в соответствии с условием задачи).



2. В инерциальной системе отсчёта Oxy, связанной с Землёй, условия равновесия тела приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g = 0 & \text{— центр масс не движется вдоль } Oy; \\ N_1 x + N_2 (l + x) - m_2 g L = 0 & \text{— нет вращения вокруг оси, проходящей через точку } A. \end{cases}$$

Здесь $l = CD$, x — плечо силы N_1 ($x = AC$).

3. С учётом условия $N_2 = 2N_1$ систему уравнений перепишем в виде:

$$\begin{cases} 3N_1 = (m_1 + m_2)g; \\ (3x + 2l)N_1 = m_2 g L. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим:

$$x + \frac{2}{3}l = \frac{m_2}{m_1 + m_2}L, \text{ откуда } l = \frac{3}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}L - x\right).$$

4. Подставляя значения физических величин, получим ответ:

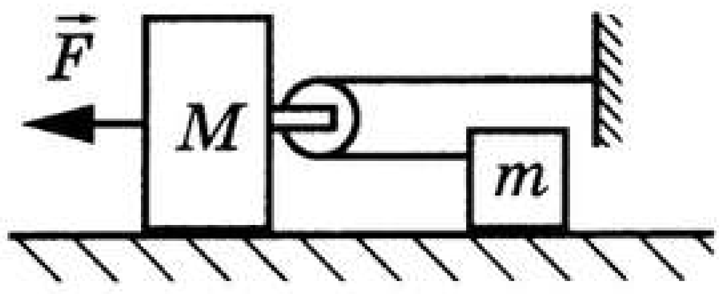
$$l = \frac{3}{2}\left(\frac{0{,}3}{0{,}2 + 0{,}3} \cdot 1 - 0{,}2\right) = 0{,}6 \text{ м.}$$

Ответ: $l = 0{,}6$ м.

26

V13

К бруску массой $M = 2$ кг прикреплён лёгкий блок (см. рисунок), через него переброшена лёгкая нерастяжимая нить, один конец которой привязан к стене, а к другому прикреплено тело массой $m = 0{,}75$ кг. На брусок действует сила $F = 10$ Н. Определите ускорение тела. Свободные куски нити горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости, тела двигаются вдоль одной прямой. Массой блока и нити, а также трением пренебречь.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

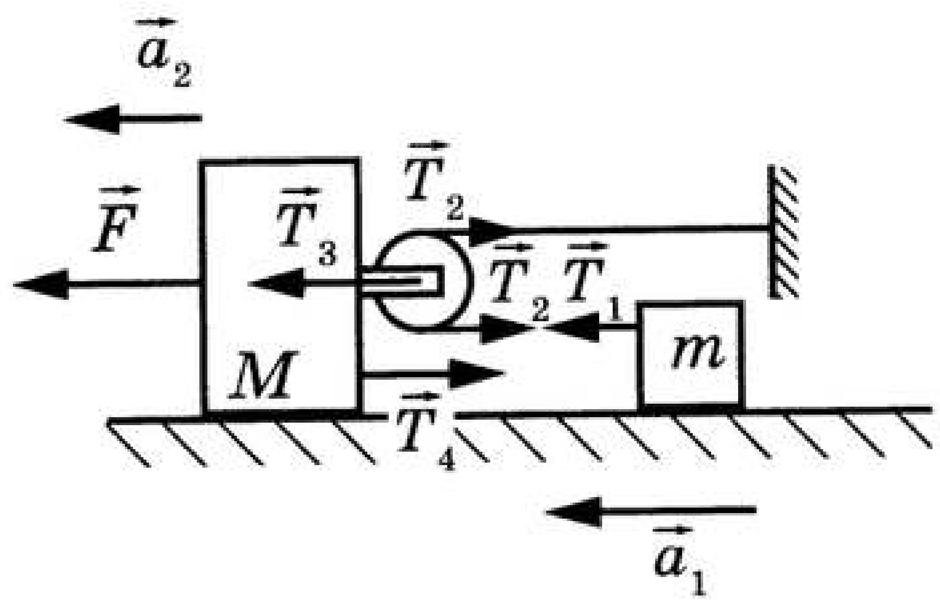
1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

2. Брусок и тело движутся поступательно, поэтому описываем их моделью материальной точки независимо от их размеров.

3. Нить невесома, блок идеален (масса блока ничтожна, трения нет), поэтому модуль силы натяжения нити в любой её точке один и тот же: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

4. Нить нерастяжима, поэтому модули ускорений подвижного блока и тела m при их прямолинейном поступательном движении отличаются в 2 раза.

Решение



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось для тела и бруска:

$ma_1 = T_1$; $Ma_2 = F - T_4$, где a_1 и a_2 — ускорения тела и бруска, $T_1 = T$ — сила натяжения нити, T_4 — сила, с которой блок действует на брусок.

Запишем второй закон Ньютона для невесомого блока:

$0 = T_3 - 2T_2$, где T_3 — сила, с которой брусок действует на блок, T_2 — сила натяжения нити, действующая на блок. Следовательно, $T_3 = 2T_2 = 2T$.

По третьему закону Ньютона $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_4|$, следовательно, $T_4 = 2T$.

Ускорение подвижного блока, а значит, и бруска массой M, в 2 раза меньше ускорения тела массой m, так как за одно и то же время перемещение тела в 2 раза больше перемещения бруска: $a_1 = 2a_2$.

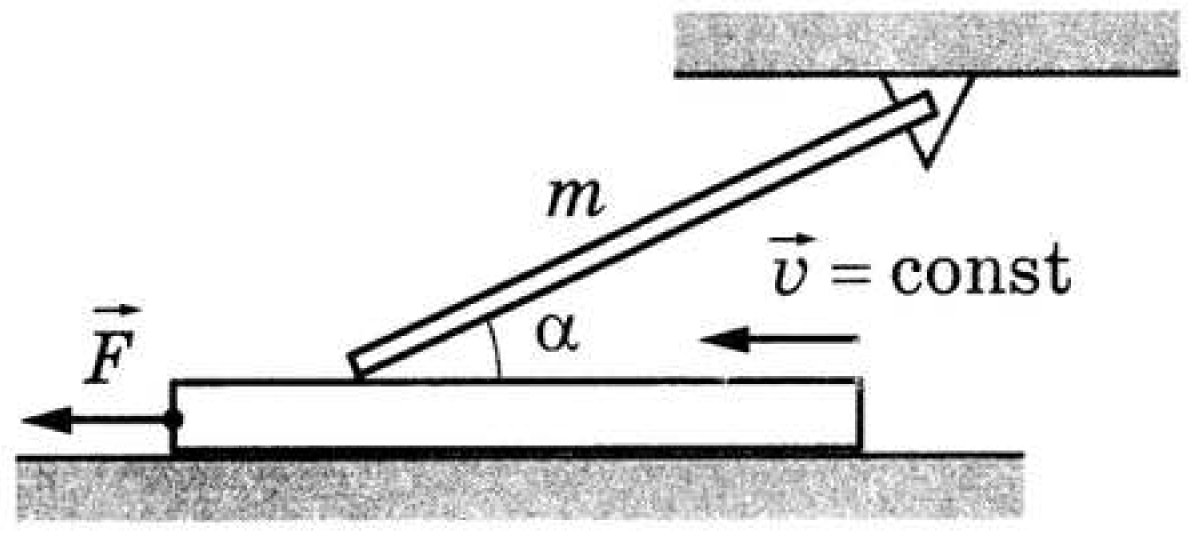
Приходим к системе уравнений: $\begin{cases} F - 2T = Ma_2, \\ T = m \cdot 2a_2, \end{cases}$ откуда

$$a_2 = \frac{F}{M + 4m};\ a_1 = 2a_2 = \frac{2F}{M + 4m} = \frac{2 \cdot 10}{2 + 4 \cdot 0{,}75} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_2 = 4$ м/с^2.

26
v15

Однородный тонкий стержень массой m одним концом шарнирно прикреплён к потолку, а другим концом опирается на массивную горизонтальную доску, образуя с ней угол $\alpha = 30°$. Под действием горизонтальной силы $\vec{F}$ доска движется поступательно влево с постоянной скоростью (см. рисунок). Стержень при этом неподвижен. Найдите m, если $F = 2$ Н, а коэффициент трения стержня по доске $\mu = 0{,}2$. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на стержень и доску. Трением доски по опоре и трением в шарнире пренебречь.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

2. Описываем стержень моделью твёрдого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

3. Сумма приложенных к стержню внешних сил равна нулю, так как он находится в равновесии относительно поступательного движения. Сумма моментов этих сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку шарнирного крепления (точку O), равна нулю, так как стержень не вращается.

4. Доска движется поступательно. Движение доски в ИСО можно описать с помощью законов Ньютона, сформулированных для материальных точек.

5. Согласно третьему закону Ньютона силы, с которыми доска и стержень взаимодействуют друг с другом, равны по модулю и направлены в противоположные стороны: на рисунках *а* и *б* в решении $\vec{N} = -\vec{P}$, $\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}$.

Решение

1. В инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй, доска по условию движется поступательно с постоянной скоростью. Поэтому, в частности, сумма горизонтальных сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_{тр1}$, приложенных к доске, равна нулю (рисунок *а*). Отсюда получаем: $F = F_{тр1}$.

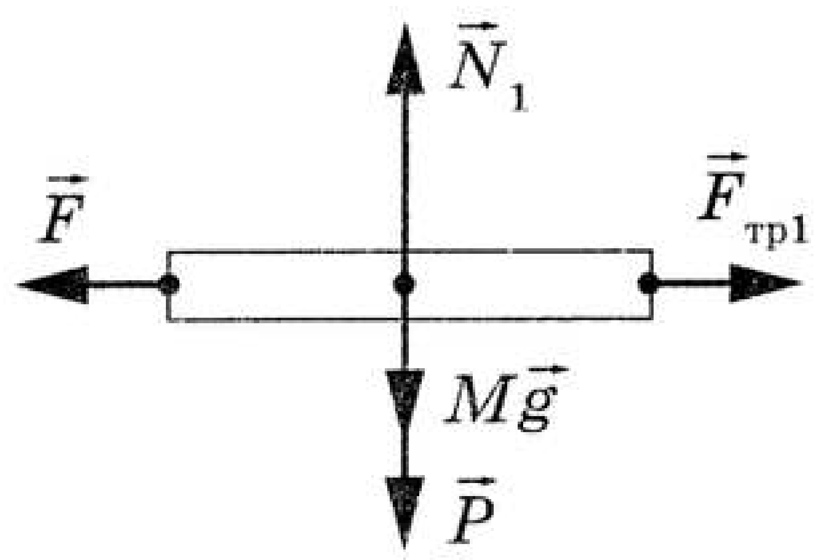


Рис. *а*

2. На рисунке *б* показаны силы, приложенные к стержню. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}$. Поэтому:

$$F_{тр2} = F_{тр1} = F. \qquad (1)$$

3. По условию задачи стержень не вращается, поэтому выполнено условие равновесия стержня на оси шарнира O (правило моментов). Обозначив длину стержня L, запишем это условие:

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha - F_{тр2}L\sin\alpha - NL\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

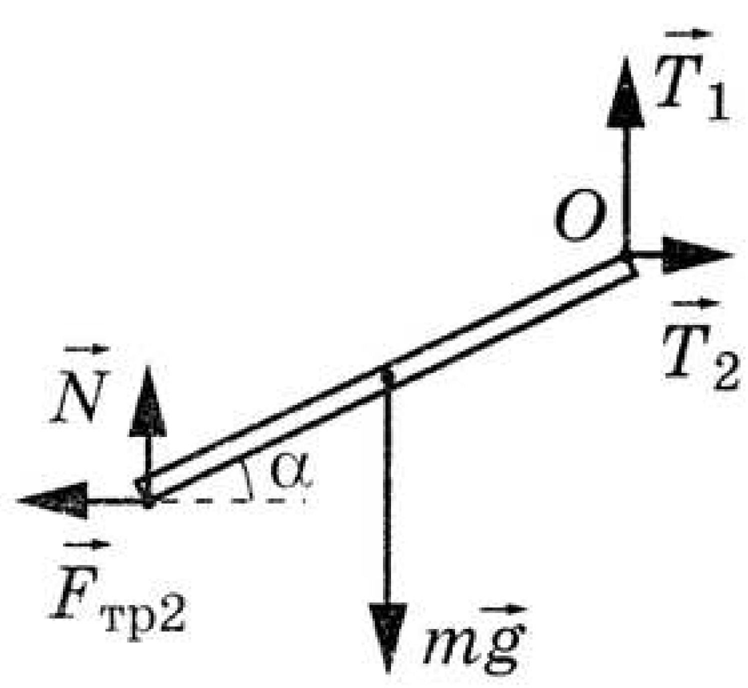


Рис. *б*

4. Доска движется относительно стержня, поэтому:

$$F_{тр2} = \mu N. \qquad (3)$$

5. Подставив (1) в (3), а (3) в (2), получим уравнение:

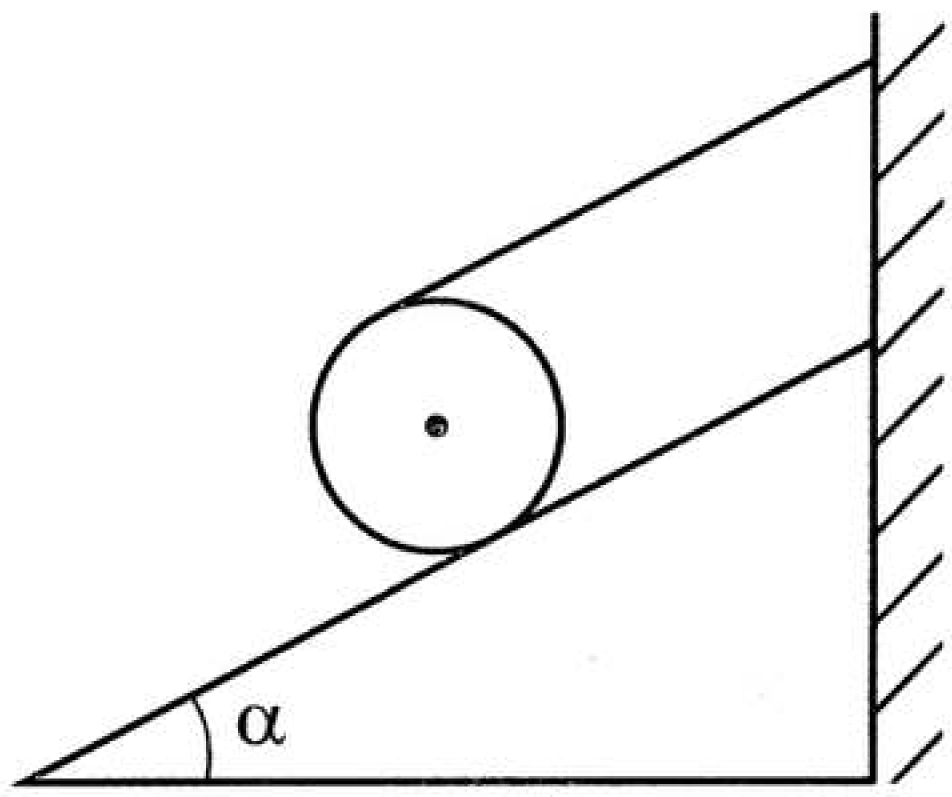
$$mg\cos\alpha - 2F\sin\alpha - 2\frac{F}{\mu}\cos\alpha = 0$$

с решением: $m = \dfrac{2F}{g}\left(\dfrac{1}{\mu} + \mathrm{tg}\alpha\right) = \dfrac{2\cdot 2}{10}\left(\dfrac{1}{0{,}2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{15}\right) \approx 2{,}2$ кг.

Ответ: $m \approx 2{,}2$ кг.

26
v17

Цилиндр массой $m = 1$ кг и радиусом $R = 4$ см, на который намотана нерастяжимая невесомая нить, положили на наклонную плоскость, а конец нити прикрепили к вертикальной стенке. Ось цилиндра горизонтальна. Нить не скользит по цилиндру, параллельна наклонной плоскости и перпендикулярна оси цилиндра (см. рисунок). Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью $\mu = 0{,}5$. При каком максимальном угле наклона плоскости к горизонту цилиндр будет находиться в равновесии? Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на цилиндр.



Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

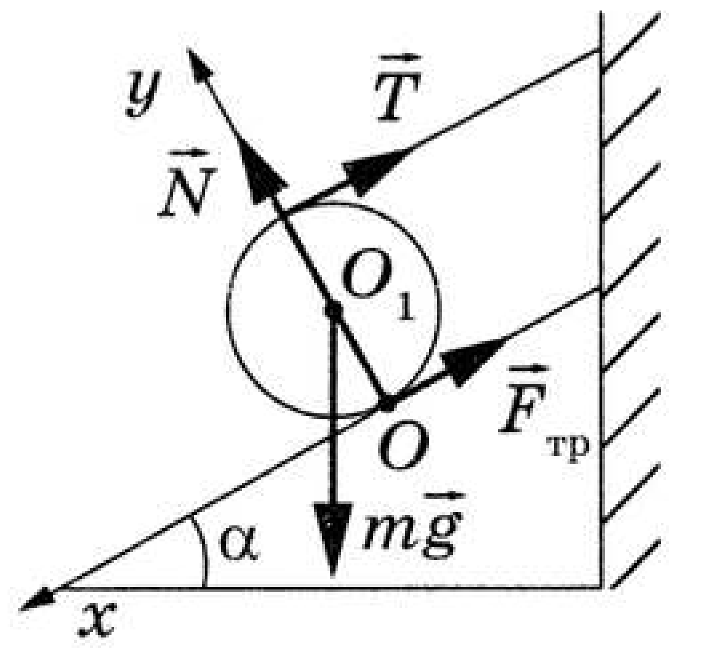
2. Описываем цилиндр моделью твёрдого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

3. Поскольку тело не движется поступательно, то векторная сумма сил, действующих на тело, равна нулю.

4. Поскольку тело не вращается, то алгебраическая сумма моментов сил относительно оси, проходящей перпендикулярно рисунку через центр, равна нулю.

Решение

1. На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Запишем условия равновесия цилиндра. Второй закон Ньютона в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта Oxy имеет вид:



$$Ox: 0 = mg\sin\alpha - T - F_{тр}; \quad (1)$$

$$Oy: 0 = N - mg\cos\alpha. \quad (2)$$

2. Запишем уравнение моментов сил относительно оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости рисунка. O_1 — центр цилиндра (плечи сил реакции опоры и тяжести равны нулю, а сил трения и натяжения нити — радиусу цилиндра R):

$$T \cdot R - F_{тр} \cdot R = 0, \text{ откуда } T = F_{тр}. \quad (3)$$

3. Поскольку в задаче спрашивают величину максимального угла наклона плоскости, рассмотрим максимальное значение модуля силы трения покоя, равное модулю силы сухого трения скольжения. Для модуля силы сухого трения скольжения запишем:

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \quad (4)$$

4. Из формул (1)–(4) получаем: $mg\sin\alpha = 2F_{тр} = 2\mu mg\cos\alpha$.

Окончательно получим: $\operatorname{tg}\alpha = 2\mu = 2 \cdot 0{,}5 = 1$, следовательно, $\alpha_{max} = 45°$.

Ответ: $\alpha_{max} = 45°$.

26 V19 Снаряд массой 2 кг разорвался в полёте на две равные части, одна из которых продолжила движение в направлении движения снаряда, а другая — в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась за счёт энергии взрыва на величину ΔE. Модуль скорости осколка, летящего по направлению движения снаряда, равен 900 м/с, а модуль скорости второго осколка — 100 м/с. Найдите величину ΔE. Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование

Задачу будем решать в инерциальной системе отсчёта, связанной с поверхностью Земли. Будем считать все тела материальными точками. Трением снаряда и осколков о воздух пренебрежём.

Поскольку время разрыва снаряда мало, импульсом внешних сил (сил тяжести) можно пренебречь, а значит, для решения задачи можно воспользоваться законом сохранения импульса.

Так как при решении задачи мы пренебрегаем силой трения, то можно использовать закон сохранения энергии для снаряда с учётом энергии разрыва.

Решение

1. Запишем законы сохранения импульса и сохранения энергии для снаряда:

$$2m \cdot v_0 = mv_1 - mv_2, \quad 2m \cdot \frac{v_0^2}{2} + \Delta E = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

где $2m$ — масса снаряда до взрыва; v_0 — модуль скорости снаряда до взрыва; v_1 — модуль скорости осколка, летящего вперёд; v_2 — модуль скорости осколка, летящего назад.

2. Выразим v_0 из первого уравнения: $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$ — и подставим во второе уравнение.

3. Получим: $\Delta E = \frac{m}{4}(v_1 + v_2)^2 = \frac{1}{4}(900 + 100)^2 = 250$ кДж.

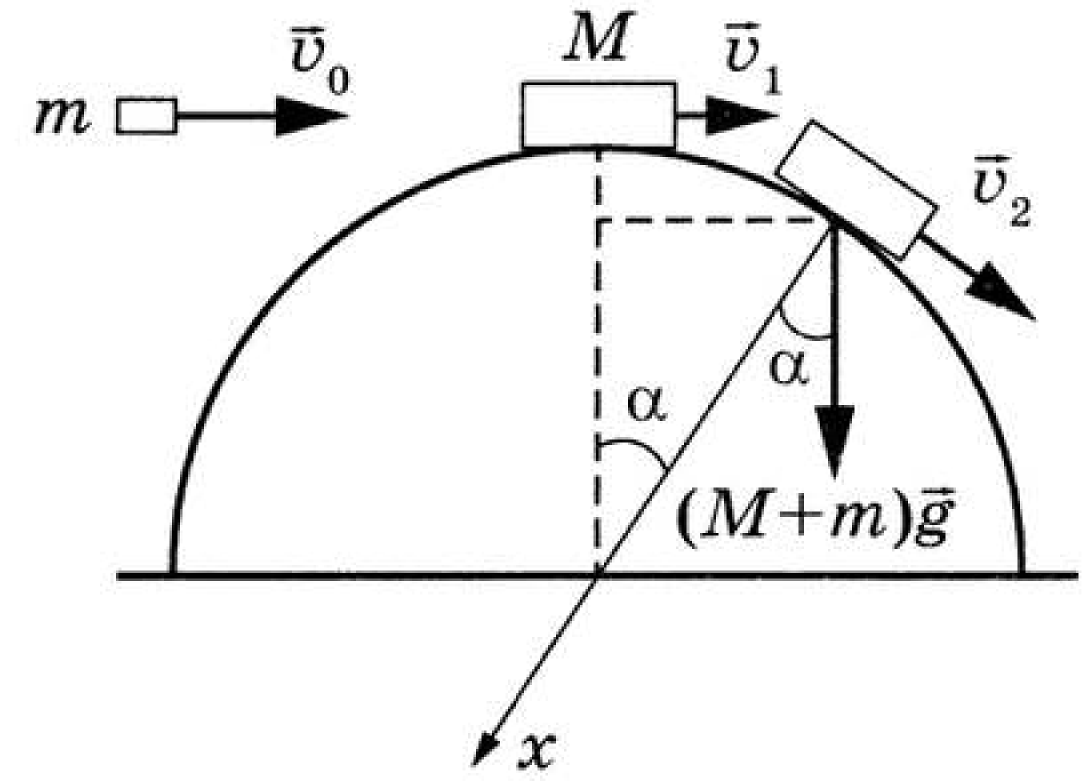
Ответ: $\Delta E = 250$ кДж.

26 v21

Небольшое тело массой $M = 0{,}99$ кг лежит на вершине гладкой полусферы радиусом $R = 1$ м. В тело попадает пуля массой $m = 0{,}01$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 200$ м/с, и застревает в нём. Пренебрегая смещением тела за время удара, определите высоту h, на которой это тело оторвётся от поверхности полусферы. Высота отсчитывается от основания полусферы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Обоснуйте применимость законов, используемых для решения задачи.

Обоснование



1. Систему отсчёта, связанную с Землёй, будем считать инерциальной. Тела можно считать материальными точками, так как их размеры пренебрежимо малы в условиях задачи.

2. При соударении для системы «пуля — тело» в ИСО выполняется закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальную ось, так как внешние силы (сила тяжести и сила реакции опоры) вертикальны.

3. При движении составного тела от вершины полусферы выполняется закон сохранения механической энергии, так как полусфера гладкая и работа силы реакции опоры равна нулю (эта сила перпендикулярна скорости тела).

4. В момент отрыва сила реакции опоры $\vec{N}$ обращается в нуль.

5. Второй закон Ньютона выполняется в ИСО для модели материальной точки.

Решение

1. Закон сохранения импульса связывает скорость пули перед ударом со скоростью составного тела массой $m + M$ сразу после удара: $mv_0 = (m + M)v_1$.

Закон сохранения механической энергии связывает скорость составного тела сразу после удара с его скоростью в момент отрыва от полусферы:

$$\frac{(m + M)v_1^2}{2} + (m + M)gR = \frac{(m + M)v_2^2}{2} + (m + M)gR\cos\alpha,$$

где v_2 — скорость составного тела в момент отрыва; $h = R\cos\alpha$ — высота точки отрыва (см. рисунок).

2. Второй закон Ньютона в проекциях на ось x (направленную в центр полусферы) в момент отрыва тела принимает вид:

$$(m + M)g\cos\alpha = \frac{(m + M)v_2^2}{R}.$$

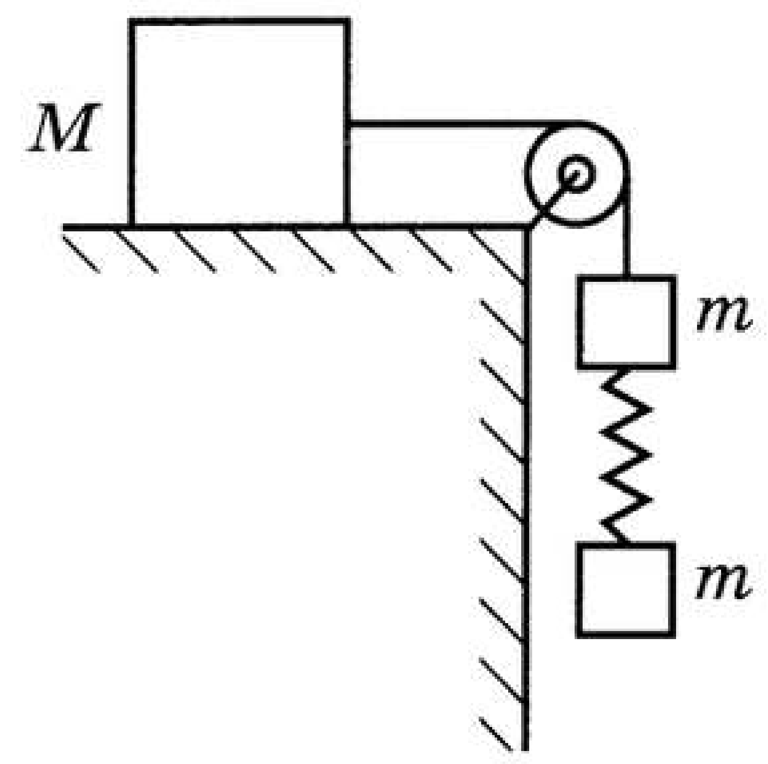
3. Объединяя уравнения, получим: $\dfrac{v_1^2}{2} + gR = \dfrac{3}{2}gh.$

Отсюда $h = \dfrac{1}{3g}\cdot\left(\dfrac{mv_0}{M + m}\right)^2 + \dfrac{2}{3}R = \dfrac{1}{3\cdot 10}\cdot\left(\dfrac{0{,}01\cdot 200}{0{,}99 + 0{,}01}\right)^2 + \dfrac{2}{3}\cdot 1 = 0{,}8$ м.

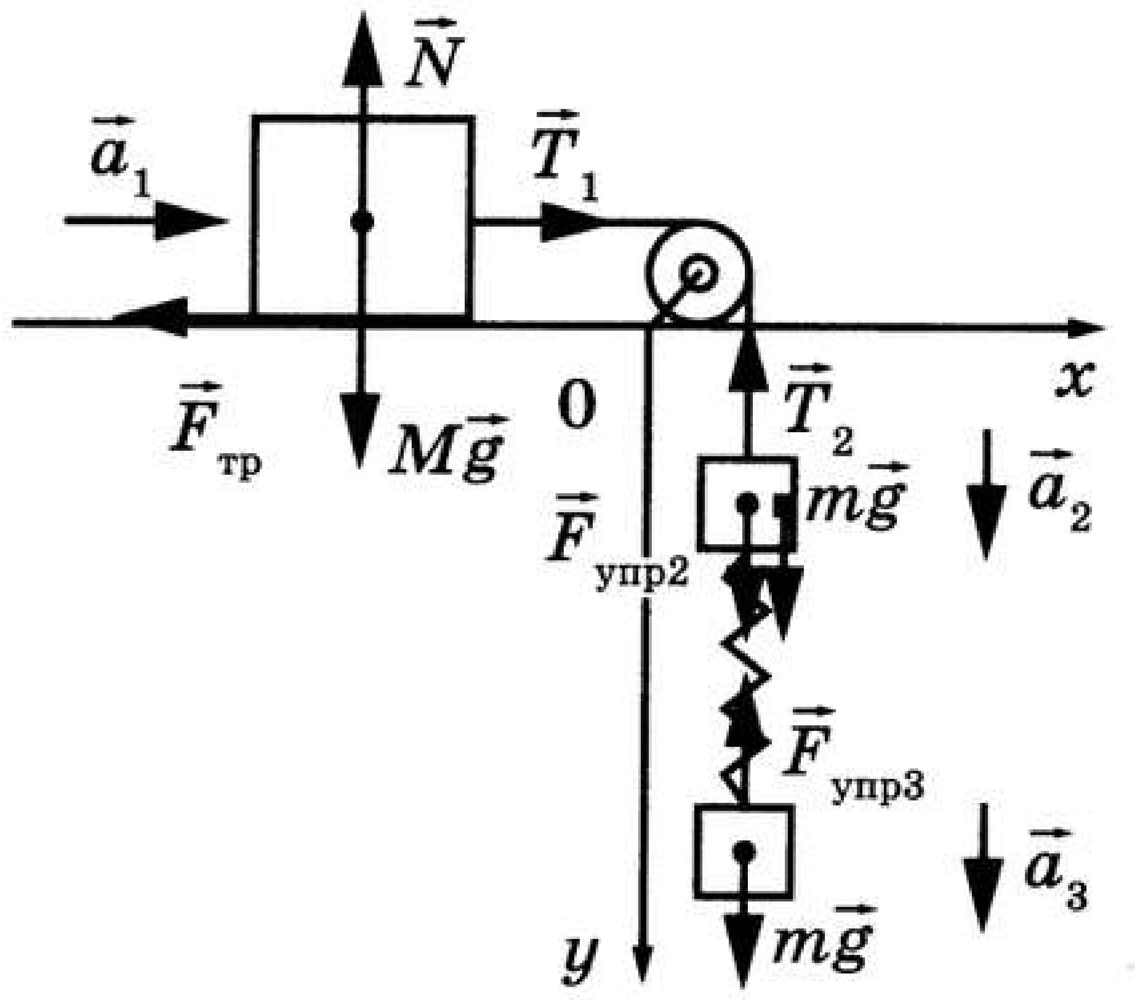
Ответ: $h = 0{,}8$ м.

26 v25

Груз массой $M = 800$ г соединён невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок, с бруском массой $m = 400$ г. К этому бруску на лёгкой пружине жёсткостью $k = 80$ Н/м подвешен второй такой же брусок. Длина нерастянутой пружины $l = 10$ см, коэффициент трения груза о поверхность стола $\mu = 0{,}2$. Определите длину пружины при движении брусков, считая, что при этом движении она постоянна. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на груз и бруски. Обоснуйте применимость используемых законов к решению задачи.



Обоснование



Задачу будем решать в инерциальной системе отсчёта, связанной с поверхностью стола. Будем применять для груза и брусков законы Ньютона, справедливые для материальных точек, поскольку тела движутся поступательно. Трением в оси блока и трением о воздух, а также массой блока пренебрежём.

Так как нить нерастяжима и длина пружины постоянна, ускорения обоих брусков и груза равны по модулю:

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = \left|\vec{a}_3\right| = a. \qquad (1)$$

На рисунке показаны силы, действующие на бруски и груз.

Так как блок и нити невесомы, а трение отсутствует, то модули сил натяжения нити, действующих на груз и верхний брусок, одинаковы:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T. \qquad (2)$$

Равны по модулю и силы

$$\left|\vec{F}_{упр2}\right| = \left|\vec{F}_{упр3}\right|, \qquad (3)$$

так как пружина лёгкая.

Решение

1. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy выбранной системы координат. С учётом (1)–(3) получим:

$$Ox\colon\ Ma = T - F_{тр},$$

$$Oy\colon\ N = Mg,\ ma = mg - T + F_{упр},\ ma = mg - F_{упр}.$$

Сложив эти уравнения, найдём ускорение тел: $a = \dfrac{2mg - F_{тр}}{M + 2m}$.

2. Сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu Mg$.

3. Из последнего уравнения в п. 1 получим $F_{упр} = m(g - a) = \dfrac{mMg(1 + \mu)}{M + 2m}$.

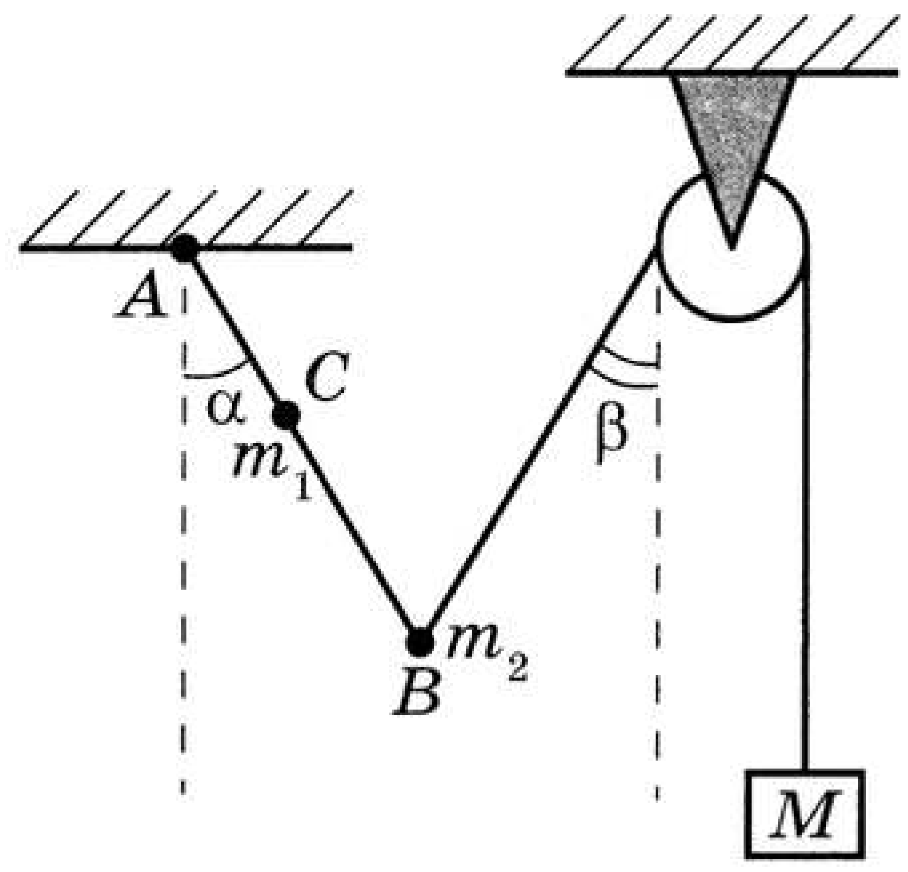
По закону Гука $F_{упр} = k\Delta l = k(L - l)$, тогда

$$L = l + \frac{mMg(1 + \mu)}{k(M + 2m)} = 0{,}1 + \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 10 \cdot (1 + 0{,}2)}{80 \cdot (0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4)} = 0{,}13 \text{ м.}$$

Ответ: $L = 0{,}13$ м.

26 v27

Невесомый стержень AB с двумя малыми грузиками массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 100$ г, расположенными в точках C и B соответственно, шарнирно закреплён в точке A. Груз массой $M = 100$ г подвешен к идеальному блоку за невесомую и нерастяжимую нить, другой конец которой соединён с нижним концом стержня, как показано на рисунке. Вся система находится в равновесии: стержень отклонён от вертикали на угол $\alpha = 30°$, а нить составляет угол с вертикалью, равный $\beta = 30°$. Расстояние $AC = b = 25$ см. Определите длину l стержня AB. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на груз M и стержень.



Обоснуйте применимость законов, используемых при решении задачи.

Обоснование

1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

2. Описываем стержень моделью твёрдого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

3. Любое движение твёрдого тела является суперпозицией поступательного и вращательного движений. Поэтому условий равновесия твёрдого тела в ИСО ровно два; одно — для поступательного движения, другое — для вращательного движения.

4. В качестве оси, относительно которой будем считать сумму моментов сил, действующих на стержень, выберем ось, проходящую перпендикулярно плоскости рисунка через точку шарнирного крепления (точку A).

5. Нить невесома, блок идеален (масса блока ничтожна, трения нет), поэтому модуль силы натяжения нити в любой её точке один и тот же.

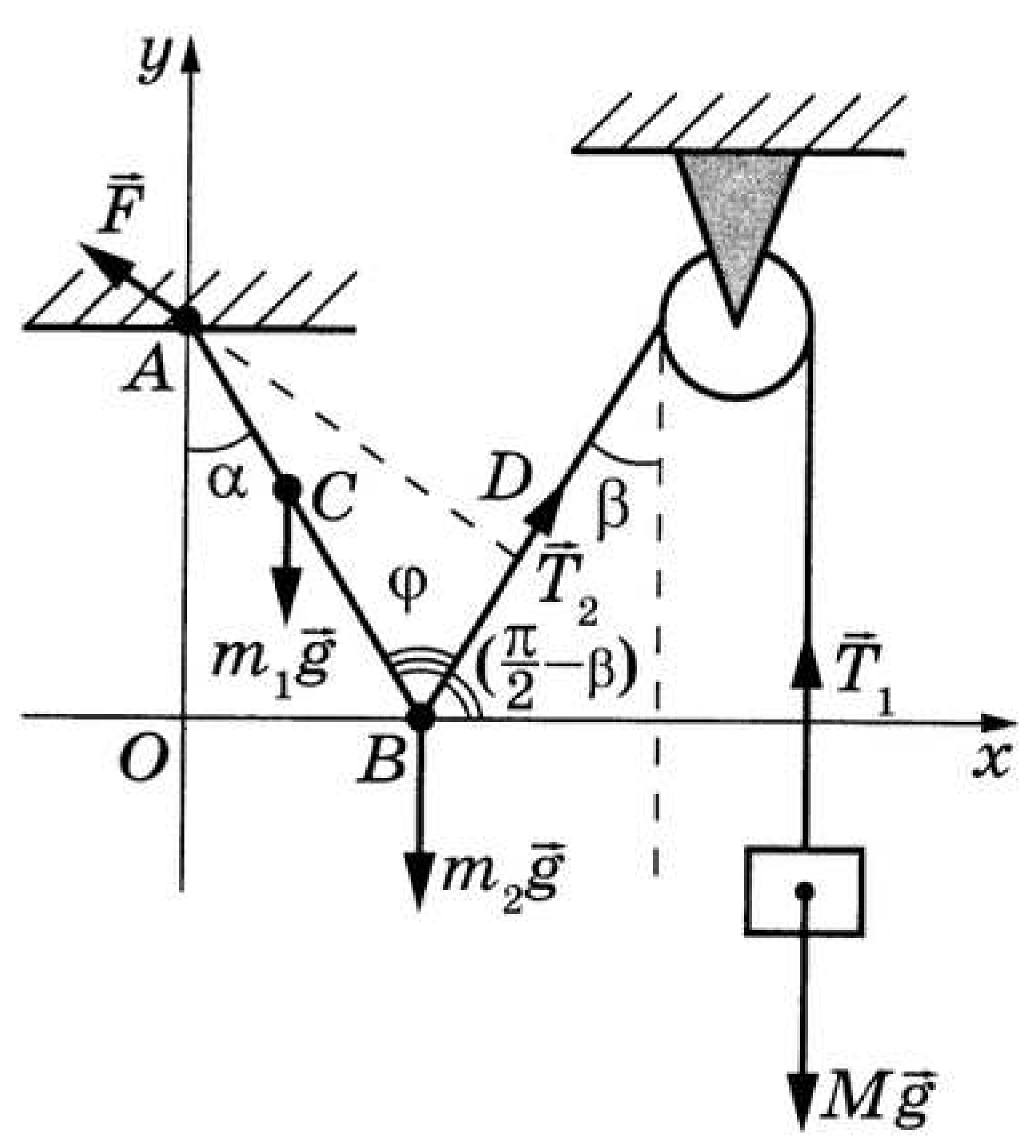
Решение

1. Введём декартову систему координат xOy, как показано на рисунке. Поскольку груз M находится в равновесии, согласно второму закону Ньютона

$$T_1 - Mg = 0. \qquad (1)$$

2. На стержень с грузами m_1 и m_2 действуют силы $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, а также сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Поскольку нить невесома, а блок идеален, то $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Кроме того, на стержень действует сила $\vec{F}$ со стороны шарнира. Запишем условие равенства нулю суммы моментов этих сил относительно оси вращения, проходящей через точку A — точку шарнирного закрепления стержня:

$$m_1 g \cdot b \sin\alpha + m_2 g \cdot l \sin\alpha - T \cdot AD = 0. \qquad (2)$$

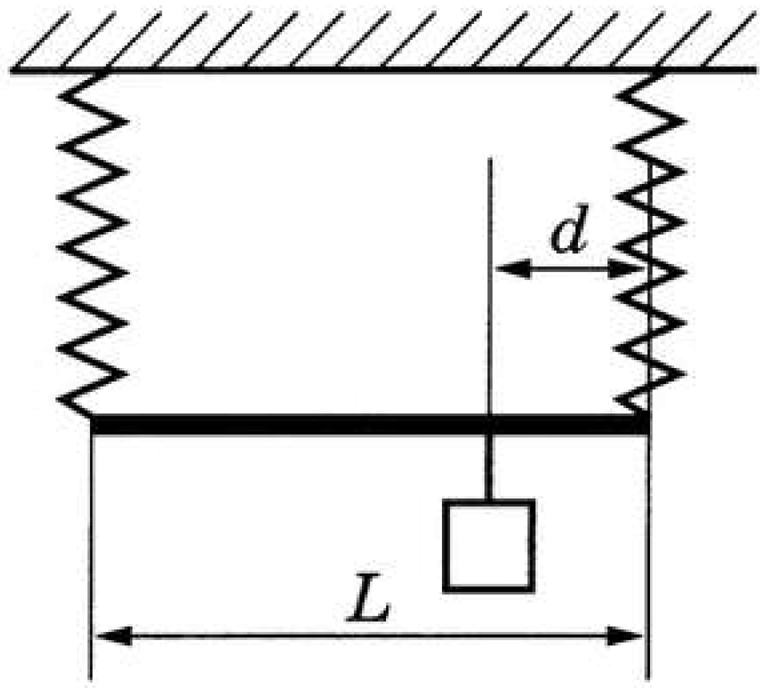


3. Решая систему уравнений (1) и (2), с учётом

$$AD = l\sin\varphi = l\sin(\alpha + \beta)$$

26 29

К двум вертикально расположенным пружинам одинаковой длины подвесили однородный стержень массой $M = 2$ кг и длиной $L = 40$ см. Если к этому стержню подвесить груз на расстоянии $d = 5$ см от правой пружины, то стержень будет расположен горизонтально, а растяжения обеих пружин будут одинаковы (см. рисунок). Жёсткость левой пружины в 3 раза меньше, чем у правой. Чему равна масса m подвешенного груза? Сделайте рисунок с указанием сил, использованных в решении задачи.



Обоснуйте применимость законов, используемых при решении задачи.

Обоснование

1. Рассмотрим задачу в системе отсчёта, связанной с Землёй. Будем считать эту систему отсчёта инерциальной (ИСО).

2. Описываем стержень моделью твёрдого тела (форма и размеры тела неизменны, расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным).

3. Любое движение твёрдого тела является суперпозицией поступательного и вращательного движений. Поэтому условий равновесия твёрдого тела в ИСО ровно два: одно для поступательного движения, другое — для вращательного движения.

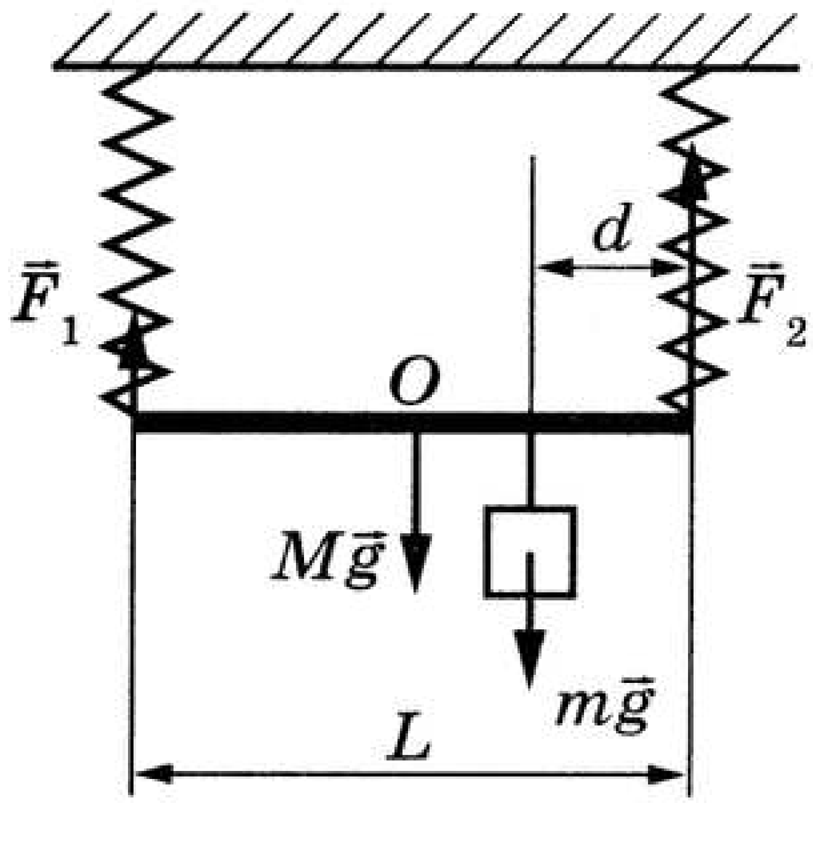
4. Сумма приложенных к твёрдому телу внешних сил равна нулю (условие равновесия твёрдого тела относительно поступательного движения).

5. Стержень находится в равновесии относительно вращательного движения, поэтому сумма моментов сил относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O, равна нулю.

Решение

1. По закону Гука модуль силы упругости равен $F = k\Delta l$.

Так как растяжения пружин одинаковы, то $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{k_2}{k_1} = 3$, где F_1, F_2 — модули сил упругости левой и правой пружин соответственно.



2. Условия равновесия стержня с грузом имеют вид

$$F_1 + F_2 = Mg + mg,$$

$F_1 \cdot \dfrac{L}{2} + mg \cdot \left(\dfrac{L}{2} - d\right) = F_2 \cdot \dfrac{L}{2}$ — правило моментов относительно оси O, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно плоскости рисунка (см. рисунок).

3. Объединяя пункты 1 и 2, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4F_1 = Mg + mg \\ mg \cdot \left(\dfrac{L}{2} - d\right) = F_1 L. \end{cases}$$

4. Из системы уравнений пункта 3 получаем $m = \dfrac{ML}{L - 4d} = \dfrac{2 \cdot 0{,}4}{0{,}4 - 0{,}2} = 4$ кг.

Ответ: $m = 4$ кг.